



TITLE:

# Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrodinger Equations (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)

AUTHOR(S):

GALTBAYAR, ARTBAZAR; YAJIMA, KENJI

---

CITATION:

GALTBAYAR, ARTBAZAR ...[et al]. Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrodinger Equations (Spectral and Scattering Theory and Related Topics). 数理解析研究所講究録別冊 2014, B45: 113-130

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/217413>

RIGHT:

© 2014 by the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

# Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations

By

ARTBAZAR GALTBUYAR\* and KENJI YAJIMA\*\*

## Abstract

We consider Schrödinger equations  $i\partial_t u = (-\Delta + V)u$  in  $\mathbb{R}^3$  with a real potential  $V$  such that, for an integer  $k \geq 0$ ,  $\langle x \rangle^k V(x)$  belongs to an amalgam space  $\ell^p(L^q)$  for some  $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$ , where  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ . Let  $H = -\Delta + V$  and let  $P_{ac}$  be the projector onto the absolutely continuous subspace of  $L^2(\mathbb{R}^3)$  for  $H$ . Assuming that zero is not an eigenvalue nor a resonance of  $H$ , we show that solutions  $u(t) = \exp(-itH)P_{ac}\varphi$  admit asymptotic expansions as  $t \rightarrow \infty$  of the form

$$\left\| \langle x \rangle^{-k-\varepsilon} \left( u(t) - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j} P_j \varphi \right) \right\|_{\infty} \leq C |t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^{k+\varepsilon} \varphi\|_1$$

for  $0 < \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$ , where  $P_0, \dots, P_{[k/2]}$  are operators of finite rank and  $[k/2]$  is the integral part of  $k/2$ . The proof is based upon estimates of boundary values on the reals of the resolvent  $(-\Delta - \lambda^2)^{-1}$  as an operator-valued function between certain weighted amalgam spaces.

## § 1. Introduction

ヒルベルト空間  $L^2(\mathbb{R}^3)$  におけるシュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$(1.1) \quad i\partial_t u = (-\Delta + V(x))u, \quad u(0) = \varphi.$$

の解の  $t \rightarrow \pm\infty$  における漸近挙動を考える。 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  と書く。この論文ではポテンシャル  $V$  は実数値で少なくとも次の条件を満たすと仮定する： $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$  を

---

Received January 4, 2012. Revised October 3, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s):

Supported by JSPS grant in aid for scientific research No. 22340029.

\*School of Mathematics and Computer Science, National University of Mongolia.

\*\*Department of Mathematics, Gakushuin University, 1-5-1 Mejiro, Toshima-ku, Tokyo 171-8588, Japan.

満たすある  $p, q$  に対して

$$(1.2) \quad V \in \ell^p(L^q) = \{u: \|u\|_{\ell^p(L^q)} \equiv \left( \sum_{j \in \mathbf{Z}^3} \|\chi_{Q_j} u\|_q^p \right)^{1/p} < \infty\},$$

ただし  $Q_j$  は  $j \in \mathbf{Z}^3$  を中心とする単位立方体,  $\chi_{Q_j}$  はその特性関数,  $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L^s}$  はルベーグ空間  $L^s(\mathbb{R}^3)$  のノルムである。  $\ell^r(L^s)$  はアマルガム空間と呼ばれ, 局所的には  $L^s$  的, 大域的には  $L^r$  的な振る舞いをする関数の空間で, 特異性と無限遠方での減衰を区別するが, なお  $\mathbf{Z}^3$ -平行移動不変なノルムをもつ使いやすい空間である。

**$H$  のスペクトル**  $\ell^r(L^s)$  は Banach 空間で包含関係

$$\ell^{r_1}(L^{s_1}) \subset \ell^{r_2}(L^{s_2}), \quad r_1 \leq r_2, \quad s_1 \geq s_2$$

を満たす。従って, (1.2) の仮定の下で

$$(1.3) \quad V \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3),$$

とくに  $V$  は

$$(1.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < r} \frac{|V(y)|}{|x-y|} dy = 0$$

を満たす, いわゆる加藤型ポテンシャルである。これから次が成立する:

(1)  $H = -\Delta + V$  は定義域を

$$D(H) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3): Vu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), -\Delta u + Vu \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

と決めると  $\mathcal{H}$  の自己共役作用素である ([31])。従って, (1.1) の初期条件  $u(0) = \varphi \in \mathcal{H}$  を満たす  $\mathcal{H}$  での解は一意的で  $u(t) = e^{-itH}\varphi$  で与えられる。

$H_0 = -\Delta$ ,  $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$  と定義する。  $H$ ,  $H_0$  のレゾルベントをそれぞれ  $R(z) = (H - z)^{-1}$ ,  $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$  と書く。

$R(z) - R_0(z)$  は  $\mathcal{H}$  のコンパクト作用素, 従って, ワイルの安定性定理 ([31]) によって  $H$  の本質的スペクトル  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$ ,  $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$  は  $H$  の離散スペクトルである。一般に  $V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$  の時, 特に (1.3) の時,  $H = -\Delta + V$  に対して正の固有値は存在しない ([18], [26] の拡張も参照)。従って,  $[0, \infty)$  は  $H$  の連続スペクトルである。一方,  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 3$  における  $H = -\Delta + V$  の負の固有値の数  $N(V)$  は Cwickel-Lieb-Rosenbjum の定理によって

$$N(V) \leq C \|V_-\|_{L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}$$

を満たす ([32])。これから次が分かる。

- (2)  $\sigma_p(H)$  は有限個で, 負または零の多重度有限な固有値からなる。 $\sigma_{ess}(H) = \sigma_c(H) = [0, \infty)$  である。

複素数上半平面を  $\mathbf{C}^+$  と書き,  $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+ = \{\lambda \in \mathbf{C} : \Im \lambda \geq 0\}$  に対して

$$G_0(\lambda) = R_0(\lambda^2), \quad G(\lambda) = R(\lambda^2)$$

と定める。 $G_0(\lambda)$  と  $R_0(\lambda^2)$  の実軸への境界値の間には

$$G_0(\pm\lambda) = R_0(\lambda^2 \pm i0), \quad G(\pm\lambda) = R(\lambda^2 \pm i0), \quad \lambda \geq 0$$

の関係がある。 $G_0(\lambda)$  はよく知られた簡単な形の積分核をもち

$$(1.5) \quad G_0(\lambda)u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy$$

と表される。これに Hardy の不等式を用いれば  $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$  の時,  $VG_0(\lambda) \in \mathbf{B}(L^1)$  で,  $V$  を  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  で近似すれば,  $VG_0(\lambda)$  は  $L^1(\mathbb{R}^3)$  のコンパクト作用素であることも分かる。

$$G(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda^2 \notin \sigma_p(H)$$

が成立する。Goldberg-Schlag([14]) は Agmon-Kuroda のよく知られた議論をルベーク空間  $L^1(\mathbb{R}^3)$  の間の作用素  $1 + VG_0(\lambda)$  に対して拡張し,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  の時にも

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(\lambda)) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \sigma_p(H)$$

が成立することを示した。ここで, 一般に  $1 \leq q \leq \infty$  に対して,  $\sigma_{L^q}(K)$  などは  $L^q(\mathbb{R}^3)$  上のコンパクト作用素  $K$  などのスペクトル (固有値の集合) である。これより, 上に注意した Ionescu-Jerison の正の固有値の不存在定理によって, (1.3) を満たす  $V$  に対して,  $G(\lambda)$  は上半平面から  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  まで  $\mathbf{B}(L^1, L^{3,\infty})$  値連続関数として拡張され, 任意の  $\delta > 0$  に対して定数  $C_\delta$  が存在して

$$(1.6) \quad \sup_{|\lambda| \geq \delta} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

が成立することが分かる (極限吸収原理. [19] による拡張も参照)。これによって:

- (3)  $[0, \infty)$  は  $H$  の絶対連続スペクトル  $\sigma_{ess}(H)$  に等しい。

$P_{ac}$  を  $H$  の絶対連続スペクトル部分空間  $\mathcal{H}_{ac}$  への直交射影とする。

0 が  $H$  の固有値であることはあり得る。さらに,  $-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0))$  であっても, 0 が固有値でないこともある。

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0)) \Leftrightarrow -1 \in \sigma_{L^\infty}(G_0(0)V)$$

である。 $\mathcal{N} = \text{Ker}_{L^\infty}(1 + G_0(\lambda)V) = L^\infty$  における  $1 + G_0(\lambda)V$  の零空間と定義する。

$$\mathcal{N} \subset \cap_{s>3} L^s(\mathbb{R}^3), \quad u \in \mathcal{N} \Rightarrow (-\Delta + V)u(x) = 0$$

である。 $\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^3) \neq \{0\}$  なら  $0$  は  $H$  の固有値であるが,  $\mathcal{N} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$  となるとは限らない。この時,  $u \in \mathcal{N} \setminus L^2$  は  $H$  の (閾値) レゾナンス状態,  $0$  は  $H$  のレゾナンスであるという。 $\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$  の場合もあり, この場合  $0$  はレゾナンスであるが, 固有値ではない。

**定義 1.1.**  $H$  は  $0$  が  $H$  の固有値でもレゾナンスでもないとき *generic type*, そうでない時 *exceptional type* という。 $H$  が *generic type* であることと  $u \in \cap_{3 < s \leq \infty} L^s(\mathbb{R}^3)$  を満たす  $-\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0$  の解  $u \neq 0$  が存在しないことは同値である。

$H$  が *generic type* であることは  $\mathcal{N} = \{0\}$  であることと同値で, この時, 上の議論から分かるように, 極限吸収原理が  $0$  を込めて成立し, (1.6) が  $|\lambda| > \gamma$  の制限を取り除いて成立する: ある定数  $C > 0$  が存在して

$$(1.7) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

**Global dispersive estimate**  $V$  が (1.3) を満たし  $H$  が *generic type* の時, 次の評価が Goldberg([15]) によって証明されている:

$$(1.8) \quad \|e^{-itH} P_{ac} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-3/2} \|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3).$$

これは時間大域的な分散型評価と呼ばれ,  $V = 0$  の時には解の表現式

$$(1.9) \quad e^{-itH_0} \varphi(x) = \frac{e^{\mp \frac{3\pi i}{4}}}{(2\pi|t|)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} \varphi(y) dy$$

からほぼ自明な評価である。この評価 (1.8) は微妙なもので  $H$  が *generic* でないと一般には成立しない。 $V \neq 0$  の時, 一般の次元  $d \geq 1$  の *generic type* の  $H$  に対する大域的な分散型評価

$$(1.10) \quad \|e^{-itH} P_{ac} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-d/2} \|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

は Journé -Soffer-Sogge [23] によって初めて示された。[23] における条件はある  $\alpha > d+4$  と  $\sigma > 0$  に対して

$$\hat{V} \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \langle x \rangle^\alpha V : W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d)$$

であったが, この条件は次第に改良されて, とくに  $d = 3$  における上に述べた結果はほぼ “sharp” ある。ここで  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$  である。同様に  $d = 1$  でも sharp な結果が得られていて  $\langle x \rangle^1 V(x) \in L^1$  であれば (1.10) が成立する。ほかの次元では結果が sharp がどうか不明であるが次の十分条件が知られている:

- (1)  $d = 2$  の時,  $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-3-\varepsilon}$  ([35]) .
- (2)  $d = 4$  の時,  $V \in C^{(d-3)/2}$  で  $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-3-\varepsilon}$  ([5], [6]) .
- (3)  $d = 5$  の時,  $V \in C^{(d-3)/2}$  で  $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-5-\varepsilon}$  ([5], [6]) .
- (4)  $d \geq 6$  の時,  $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-d-2-\varepsilon}$  で  $d_* = \frac{d-1}{d-2}$  と  $\sigma > \frac{1}{d_*}$  に対して  $\mathcal{F}(\langle x \rangle^{2\sigma} V) \in L^{d_*}(\mathbb{R}^d)$ . ただし,  $\mathcal{F}$  はフーリエ変換である。

$d = 1$  の時には  $\langle x \rangle^1 V(x) \in L^2$  であれば,  $H$  が exceptional type の時にも (1.10) が成立する。一方,  $d \geq 2$  の時には,  $H$  が exceptional type だと (1.10) は成立しないが,  $d = 3$  の時には, この時にも,  $e^{-itH} P_{ac} u$  の漸近挙動の精密な情報が得られている ([39], [9, 10]).

**主定理** この講演の目的は Goldberg の評価 (1.8) における, 主要項を取り出して,  $e^{-itH} P_{ac}$  の漸近展開を与える次の定理を示すことである。  $a \geq 0$  の時,  $[a]$  は  $a$  の整数部分である。

定理 1.2.  $V$  はある整数  $k \geq 0$  とある  $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$  に対して

$$(1.11) \quad \langle x \rangle^k V \in \ell^p(L^q)$$

みたし,  $H$  は generic type と仮定する。この時, 任意の  $0 \leq \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$  に対して  $e^{-itH} P_{ac}$  は  $t \rightarrow \infty$  において次の漸近展開を持つ:

$$(1.12) \quad \left\| \langle x \rangle^{-k-\varepsilon} \left( e^{-itH} P_{ac} - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j} P_j \right) \varphi \right\|_{\infty} \leq C |t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^{k+\varepsilon} \varphi\|_1,$$

ここで  $P_0, \dots, P_{[k/2]}$  は  $(H - \lambda^2)^{-1}$  の  $\lambda = 0$  の微分を用いて書ける有限次元作用素,  $C > 0$  は  $\varphi$  によらない定数である。  $t \rightarrow \infty$  でも同様である。

定理についてのいくつかの注意を与えよう。

注意 1.3.

- (1)  $H = -\Delta$  の時の表現式 (1.9) から確かめられるように, (1.12) の右辺の減衰度  $C|t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}}$  は sharp である。
- (2)  $k$  が整数でない時の  $V$  の重みは  $p$  を変えることで部分的には吸収できる。
- (3)  $k = 0$  の時の (1.12) から, 分散型評価 (1.8) における主要部は  $t^{-\frac{3}{2}} P_0$  である。
- (4)  $V$  が  $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\sigma}$  の形の条件を満たすとき,  $e^{-itH} P_{ac}$  を重み付き  $L^2$  空間  $\langle x \rangle^{k+\delta} L^2(\mathbb{R}^d)$  から  $\langle x \rangle^{-k-\delta} L^2(\mathbb{R}^d)$  ( $\delta > d/2$ ) への作用素と考えての (1.12) と同様な漸近展開が Rauch ([30]) や Jensen-Kato ([20]) , とくに Murata ([29]) によって一般的な条件の下で得られている。これらの結果は  $H$  が exceptional type の時にも得られていて, 定理 1.2 はこれらの制限  $L^p$  版である。この定理を一般次元あるいは, exceptional type の時に拡張することが望まれる。

- (5)  $d = 1$  の時には, Mizutani ([28]) によって (1.8) が exceptional type の場合を含めて得られている.

以下において証明のあらましを  $k = 0$  の場合に限って述べる。 $H$  は generic type と仮定する。証明は Goldberg による分散型評価 (1.8) の論法の精密化で次元が 3 であること, とくに  $G_0(\lambda)$  の積分核が (1.5) のように単純な形であることに強く依存する。

この論法を実行するのに weighted resolvent

$$(1.13) \quad G_{0,\varepsilon}(\lambda) = \langle x \rangle^\varepsilon G_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

のアマルガム空間の間の評価が必要で Kenig-Ruiz-Sogge あるいは Goldberg-Schlag の  $L^p$  評価を改良する必要がある。このレゾルベントの評価の改良から始める。

## § 2. Resolvent の評価

$3/2 \leq \rho \leq 2$  に対して双対的な指数  $r(\rho)$  と  $s(\rho)$  を

$$r(\rho) = \frac{2\rho}{\rho+1}, \quad s(\rho) = \frac{2\rho}{\rho-1}, \quad \frac{1}{r(\rho)} + \frac{1}{s(\rho)} = 1$$

と定義する。 $\rho$  が  $3/2$  から  $2$  に増加するとき,  $r(\rho)$  は増加し,  $s(\rho)$  は減少して

$$6/5 \leq r(\rho) \leq 4/3, \quad 4 \leq s(\rho) \leq 6$$

となる。(1.13) で定義した  $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$  の重み  $\langle x \rangle^{-\varepsilon}$  をコントロールするためのパラメータ  $\varepsilon_*(\rho)$  と  $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$  の適当な空間の間での作用素ノルムの  $\lambda \rightarrow \infty$  における減衰を記述するための指数  $\delta_*(\rho)$  を

$$(2.1) \quad \varepsilon_*(\rho) = \frac{2}{\rho} - 1, \quad \delta_*(\rho) = 2 - \frac{3}{\rho}.$$

と定義する。 $\rho$  が  $3/2$  から  $2$  に増加すると,  $\varepsilon_*(\rho)$  は減少,  $\delta_*(\rho)$  は増加して

$$0 \leq \varepsilon_*(\rho) \leq 1/3, \quad 0 \leq \delta_*(\rho) \leq 1/2$$

となる。三点  $P_\rho, Q, R$  を次で定め,

$$P_\rho = \left( \frac{1}{r(\rho)}, \frac{1}{s(\rho)} \right), \quad Q = \left( \frac{2}{3}, 0 \right), \quad R = \left( 1, \frac{1}{3} \right),$$

閉三角形  $\triangle P_\rho QR$  から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho \equiv \triangle P_\rho QR \setminus \{Q, R\}$$

と定める。さらに  $0 \leq \kappa \leq 1$  に対して  $\mathcal{D}_\rho$  と頂点  $P_\rho$  を共有し, 底辺が平行な閉三角形から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho(\kappa) \equiv \triangle P_\rho Q_\kappa R_\kappa \setminus \{Q_\kappa, R_\kappa\}, \quad Q_\kappa = \left( \frac{2+\kappa}{3}, 0 \right), \quad R_\kappa = \left( 1, \frac{1-\kappa}{3} \right).$$

と定義する。点  $P_\rho$ , 底辺  $QR$  および  $Q_\kappa R_\kappa$  はそれぞれ直線

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{2+\kappa}{3}$$

上にある。  $0 \leq \theta \leq 1$  に対して底辺  $QR$ ,  $Q_\kappa R_\kappa$  と平行で  $\mathcal{D}_\rho$  および  $\mathcal{D}_\rho(\kappa)$  を  $\theta$  対  $1-\theta$  に内分する 2 つの線分を

$$L_\theta(\rho) = \mathcal{D}_\rho \cap \left\{ \left( \frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right) : \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{2\theta}{3} \right\},$$

$$L_{\kappa,\theta}(\rho) = \mathcal{D}_\rho(\kappa) \cap \left\{ \left( \frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right) : \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{(2+\kappa)\theta}{3} \right\}$$

と定義する。以下,  $\gamma$  は作用素値関数の滑らかさを記述するためのパラメータである。

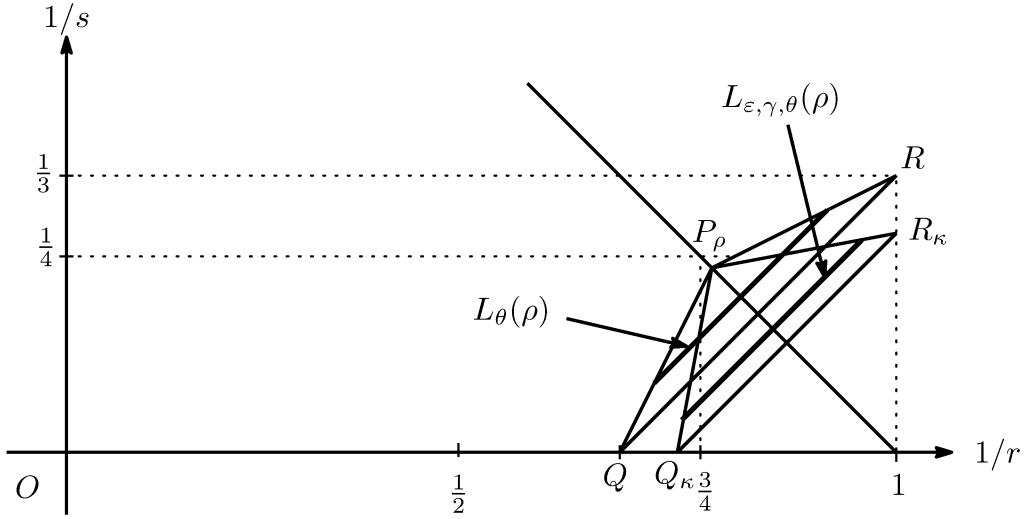


Figure 1.

$$\varepsilon(\rho, \theta) = \theta\varepsilon + (1-\theta)\varepsilon_*(\rho).$$

と定義する。次の評価が成立する：バナッハ空間  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  に対して  $\mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  は  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  への有界作用素の全体がなすバナッハ空間,  $\mathbf{B}(\mathcal{X}) = \mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$  である。

定理 2.1.  $3/2 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \varepsilon, \gamma$  は  $\varepsilon + \gamma \leq 1$  を満たし,  $0 < \theta < 1$  とする。

(1) 任意の  $\lambda \in \mathbf{C}^+$  に対して  $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$  は,  $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho)$  と  $(1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon,\theta}(\rho)$  を満たす  $(r, s)$ ,  $(\tilde{r}, \tilde{s})$  に対して  $\ell^{\tilde{r}}(L^r)$  から  $\ell^{\tilde{s}}(L^s)$  への有界作用素.  $c > 0$  を定めると  $|\lambda| \geq c$  をみたす  $\lambda \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$  に対して次の評価を満たす：

$$(2.2) \quad \|G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))} \leq C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}.$$

(2)  $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho)$  と  $(1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon+\gamma,\theta}(\rho)$  を満たす  $(r, s)$ ,  $(\tilde{r}, \tilde{s})$  に対して,  $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$  は  $\lambda$  の  $\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))$  値関数として

(a)  $\mathbf{C}^+$  において正則,  $\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$  において強連続,



- (b)  $\gamma > 0$  であれば  $\overline{\mathbf{C}}^+ \setminus \{0\}$  において指数  $\theta\gamma$  の局所 Hölder 連続である。
- (c)  $c > 0$  の時, 適当な定数  $C > 0$  が存在して  $|\lambda| > c$  および  $|\sigma| < |\lambda|/2$  に対して

$$(2.3) \quad \|\Delta^\sigma G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))} \leq C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}|\sigma|^{\theta\gamma},$$

ただし  $(\Delta^\sigma f)(\lambda) = f(\lambda + \sigma) - f(\lambda)$  は  $\lambda$  に関する差分作用素である。

レゾルベントの微分に対しては次が成立する。

$$K_{l,\pm\varepsilon}(\lambda) = \langle x \rangle^{-l} G_{0,\pm\varepsilon}(\lambda) \langle x \rangle^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

と定義する。

定理 2.2.  $l = 1, 2, \dots$  とし,  $\rho, \varepsilon, \gamma$  および  $\theta$  は定理 2.1 の通り,  $(r, s), (\tilde{r}, \tilde{s})$  は  $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho), (1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon,\gamma,\theta}(\rho)$  を満たす指数とする。この時：

- (a)  $\lambda \mapsto K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda) \in \mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))$  は  $\lambda \in \mathbf{C}^+$  の正則関数,  $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$  に  $C^l$  級関数として拡張される。
- (b)  $u, \lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$  によらない定数  $C > 0$  が存在して次が成立する：

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^l \|K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}^{(j)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde{s}}(L^s)} + \sup_{\sigma \neq 0} |\sigma|^{-\gamma\theta} \|\Delta^\sigma K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}^{(l)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde{s}}(L^s)} \\ \leq C \langle \lambda \rangle^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)} \|u\|_{\ell^{\tilde{r}}(L^r)}.$$

定理 2.2 から  $G(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}$  の  $\lambda$  に関する微分可能性, ならびに導関数の性質が得られるが詳しくは述べない。定理 2.1 ならびに定理 2.2 の証明もここでは与えない。[13] を参照されたい。

### § 3. 定理 1.2 の証明のあらすじ

$k = 0$  の時の定理 1.2 の証明のあらすじを述べる。 $\langle x \rangle^{-s} L^r = \{\langle x \rangle^{-s} u : u \in L^r\}$  は重み付き  $L^2$  空間,

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} u(x) \overline{v(x)} dx$$

である。次の cut-off 関数  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  を取っておく。

$$(3.1) \quad \chi(\lambda) = \chi(-\lambda); \quad \chi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\lambda| \leq 1, \\ 0 & \text{for } |\lambda| \geq 2 \end{cases}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\lambda - 3n) = 1.$$

$L > 0$  に対して  $\chi_L(\lambda) = \chi(\lambda/L)$  と定義する。レゾルベント方程式を使うと

$$(3.2) \quad G(\lambda) = (1 + G_0(\lambda)V)^{-1}G_0(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}.$$

$u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  とする。  $H$  は generic type だから  $(e^{-itH}P_{ac}u, v)$  をレゾルベントの境界値を用いて

$$(e^{-itH}P_{ac}u, v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-it\mu} ((R(\mu + i0) - R(\mu - i0))u, v) \chi_L(\sqrt{\mu}) d\mu$$

と表現できる (Stone の公式)。この右辺で変数を  $\mu = \lambda^2$  と置き換え、  $G(\lambda) = R(\lambda^2)$  を用いると

$$(e^{-itH}P_{ac}u, v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G(\lambda)u, v) \lambda \chi_L(\lambda) d\lambda$$

$\lambda$  について部分積分すると

$$(3.3) \quad -\frac{1}{2t\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G'(\lambda)u, v) \chi_L(\lambda) d\lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G(\lambda)u, v) \chi'_L(\lambda) d\lambda \right)$$

これを

$$\lim_{L \rightarrow \infty} ((U_{1,L}(t)u, v) + (U_{2,L}(t)u, v)).$$

と書く。  $U_{1,L}(t)$  が定理の (1.12) を満たすこと、  $U_{2,L}(t)$  が剰余項の評価

$$(3.4) \quad \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} U_{2,L} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-\frac{3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^\varepsilon \varphi\|_1$$

を満たすことを示せばよい。ただし定数  $C > 0$  は  $R > 0$  を十分大とすれば  $L \geq R$  によらない。  $U_{1,L}(t)$  についてだけ説明する。  $U_{2,L}(t)$  に対する評価 (3.4) は  $U_{1,L}(t)$  に現れる剰余項の評価と平行して行うことができるからである。

Goldberg に従って

$$(3.5) \quad G'(\lambda) = 2\lambda G(\lambda)^2 = (1 + G_0(\lambda)V)^{-1} G'_0(\lambda) (1 + VG_0(\lambda))^{-1}$$

と書く。  $G_0(\lambda)$  の積分核は  $ie^{i\lambda|x-y|}/(4\pi)$  であった。  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ,  $L \geq 1$  に対して

$$(3.6) \quad w_L(\lambda, \cdot) = \chi(\lambda/2L) (1 + VG_0(\lambda))^{-1} w(x).$$

と定義する。  $((1 + G_0(\lambda)V)^{-1})^* = (1 + VG_0(-\lambda))^{-1}$  だから

$$(3.7) \quad (U_{1,L}(t)u, v) = -\frac{1}{2t\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} \langle \chi(\lambda/L) G'_0(\lambda) u_L(\lambda), v_L(-\lambda) \rangle d\lambda.$$

$\hat{u}_L(\rho, x) = (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \rho} u_L)(\rho, x)$  と書く。次の補題が重要である。

補題 3.1.  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  とする。  $\hat{u}_L(\rho, x)$  は

$$(3.8) \quad \|(\langle \rho \rangle^\varepsilon + \langle x \rangle^\varepsilon) \hat{u}_L(\rho, x)\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},$$

を満たす。ただし定数は  $L \geq 1$ ,  $u$  にはよらない。

$k = 0$  の時, 定理 1.2 は補題 3.1 から次のようにすぐ出る。

$$F_L(\sigma) = \mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(\langle \chi(\lambda/L)G'_0(\lambda)u_L(\lambda), v_L(-\lambda) \rangle)(\sigma)$$

と定義する。 $G'_0(\lambda)$  の積分核は  $ie^{i\lambda|x-y|}/4\pi$  だから

$$F_L(\sigma) = \frac{i}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \iint L\hat{\chi}(L(\sigma - |x-y| - \mu - \rho))\hat{u}_L(\mu, y)\overline{\hat{v}_L(\rho, x)}d\mu d\rho dx dy.$$

次の補題は変数変換から直ちにしたがう：

補題 3.2.  $L \geq 1$  によらない定数が存在して  $\rho \geq 0$  に対して

$$(3.9) \quad \int \langle \sigma \rangle^\rho L |(\mathcal{F}\chi^{(\alpha)})(L(\sigma - \Sigma))| d\sigma \leq C_\rho \langle \Sigma \rangle^\rho.$$

補題 3.2 と補題 3.1 をあわせて用いれば

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} \langle \sigma \rangle^\varepsilon |F_L(\sigma)| d\sigma &\leq C \iint_{\mathbb{R}^8} \langle |x-y| + \mu + \rho \rangle^\varepsilon |\hat{u}_L(\mu, y)\hat{v}_L(\rho, x)| d\mu d\rho dx dy \\ &\leq C \|(\langle \mu \rangle^\varepsilon + \langle y \rangle^\varepsilon)\hat{u}_L\|_1 \|(\langle \rho \rangle^\varepsilon + \langle x \rangle^\varepsilon)\hat{v}_L\|_1 \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1 \|\langle x \rangle^\varepsilon v\|_1. \end{aligned}$$

(3.7) の右辺にパーセバルの等式を用い, 次に  $e^{i\sigma^2/4t} = 1 + (e^{i\sigma^2/4t} - 1)$  と分解すれば

$$(3.11) \quad \langle U_{1,L}(t)u, v \rangle = \frac{e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} F_L(\sigma) d\sigma + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\sigma^2/4t} - 1) F_L(\sigma) d\sigma \right).$$

Fourier の逆変換公式によって右辺の第一項は次に等しい：

$$(3.12) \quad \frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}} \langle G'_0(0)u_L(0), v_L(0) \rangle = \frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}} \langle G'(0)u, v \rangle$$

(3.10) から第二項は剰余項である。

$$\frac{2^{1-\varepsilon}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^\varepsilon |F_L(\sigma)| d\sigma \leq \frac{C}{|t|^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1 \|\langle x \rangle^\varepsilon v\|_1$$

だからである。これによって, 定理 1.2 の証明は補題 3.1 の証明に帰着する。

#### § 4. 補題 3.1 の証明の大筋

$u_L(\lambda)$  を高エネルギー部分

$$(4.1) \quad u_{L,high}(\lambda) = (1 - \chi(\lambda/\lambda_0))u_L(\lambda)$$

と低エネルギー部分

$$(4.2) \quad u_{L,low}(\lambda) = \chi(\lambda/\lambda_0)u_L(\lambda)$$

に分解する。  $\chi_{\geq}(\lambda) = 1 - \chi(\lambda)$  と書く。  $\lambda_0 > 0$  は大きなパラメータである。  $u_{L,high}(\lambda)$ ,  $u_{L,low}(\lambda)$  がおのこの (3.8) を満たすことを別々の方法で示す。

#### § 4.1. 高エネルギー部分の評価

$\lambda_0 \leq L$  に対して

$$(4.3) \quad h_{L,\lambda_0}(\lambda) = \chi_{\geq}(\lambda/\lambda_0)\chi(\lambda/L)$$

と定義する。  $V \in \ell^p(L^q)$  と仮定し,

$$\kappa_{\max} = 3(1/p - 2/3), \quad r_{\max} = \min(p_*, 3q/(q+3))$$

と定義する。ただし

$$\frac{1}{p_*} = 1 - \left( \frac{1}{p} - \frac{2+\varepsilon+\gamma}{3} \right).$$

である。  $1 < p_* \leq \frac{3}{2+\varepsilon+\gamma}$  が成立する。

**命題 4.1.**  $0 \leq \gamma, \varepsilon, \gamma + \varepsilon < \kappa_{\max}$  とする。  $\Lambda > 0$  が存在して  $\Lambda \leq \lambda_0 < L$  の時, 次が成立する:

$$(4.4) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon |\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} u_{L,high}(\sigma, x)| dx d\sigma \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

ここで,  $C$  は  $u$ ,  $\Lambda \leq \lambda_0 < L$  によらない定数である。

**命題の証明**  $|\lambda| \rightarrow \infty$  の時,  $\|(VG_0(\lambda))^3\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm\varepsilon} L^1)} \rightarrow 0$  が成立する。これを用いて  $u_{L,high}(\lambda)$  の定義 (3.6) の中の  $(1 + VG_0(\lambda))^{-1}$  を

$$(1 + VG_0(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G_n(\lambda), \quad G_n(\lambda) \equiv (VG_0(\lambda))^n$$

と展開すれば

$$(4.5) \quad u_{L,high}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$$

$h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$  に対して次が成立する:

**補題 4.2.**  $0 \leq \varepsilon, \gamma, \varepsilon + \gamma < \kappa_{\max}$  とする。  $\Lambda \leq \lambda_0 < L$  の時, 次が成立する:

$$(4.6) \quad \int_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon |\mathcal{F}(h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u)(\sigma, x)| d\sigma dx \leq C^n \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1.$$

ただし,  $C$  は  $n, L$  によらない定数。

**証明.**  $G_0(\lambda)$  の積分核表現を用いて  $G_n(\lambda)u(x)$  を  $\mathbb{R}^{3n}$  上の積分として表現する :  $x_0 = y$ ,  $x = x_n$ ,  $\Sigma = \sum_{j=1}^n |x_j - x_{j-1}|$  と書くとき,

$$(4.7) \quad G_n(\lambda)u(x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{e^{i\lambda\Sigma} \prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y) dy dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Fubini を使って積分順序を入れ替えて

$$\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma, x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\hat{h}(\sigma - \Sigma) \prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y) dy dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

とし, 次に (3.9) を使って

$$\int_{\mathbb{R}} |\langle \sigma \rangle^\gamma \hat{h}(\sigma - \Sigma)| d\sigma \leq C \langle \Sigma \rangle^\gamma \leq C \sum_{j=1}^n \langle x_j - x_{j-1} \rangle^\gamma$$

と評価すれば

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \int \langle \sigma \rangle^\gamma |\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma, x)| d\sigma \\ & \leq C \sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\langle x_m - x_{m-1} \rangle^\gamma \prod_{j=1}^n |V(x_j)|}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} |u(y)| dy dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

$K_1, K_2$  をそれぞれ積分核

$$K_1(x, y) = \frac{V(x)}{4\pi|x - y|}, \quad K_2(x, y) = \frac{V(x)\langle x - y \rangle^\gamma}{4\pi|x - y|}$$

を持つ積分作用素とする。この時,

$$\|K_1\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm\epsilon} L^1)} + \|K_2\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm\epsilon} L^1)} \leq C$$

で, (4.8) の右辺の各項は  $n-1$  個の  $K_1$  と 1 個の  $K_2$  の積である。(4.6) が従う。  $\square$

補題 4.2 の右辺には  $n$  について減衰する因子が含まれず, (4.5) において和を取ることができない。 $G_0(\lambda)$  の  $|\lambda| \rightarrow \infty$  での減衰評価 (2.2) を用いて減衰因子を含む評価を得よう。

補題 4.3.  $0 \leq \epsilon + \gamma < \kappa_{\max}$ ,  $3/2 \leq \rho \leq 2$  とする。定数  $0 < \theta_* < 1$  と  $n_0$  が存在して任意の  $\theta_* \leq \theta < 1$  と  $n \geq n_0$  に対して:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \|\langle x \rangle^\epsilon \langle \sigma \rangle^{\theta\gamma} \mathcal{F}(h_{L, \lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u)(x, \sigma)\|_1 \\ & \leq C^n \lambda_0^{1-(n-2)(1-\theta)\delta_*(\rho)} \|\langle x \rangle^\epsilon u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

ここで定数  $C$  は  $u, n \geq n_0, 1 \leq \lambda_0 \leq L$  によらない。

**証明.** レゾルベントの減衰評価とポテンシャルに対する仮定を用いれば  $1 < r < r_{\max}$  に対して,  $\theta_* = \theta(\rho, \varepsilon, \gamma, r)$  を適当に選ぶと

$$\begin{aligned}
 & \| \langle x \rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u \|_{L^1} \\
 & \leq \| \langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon} \|_{\mathbf{B}(L^r, L^1)} \prod_{i=2}^{n-1} \| \langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon} \|_{\mathbf{B}(L^r)} \\
 (4.10) \quad & \times \| \langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) u \|_{L^1} \leq C(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta_*(\rho))} \| \langle x \rangle^{-\varepsilon} u \|_1,
 \end{aligned}$$

同様に差分商に対して

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \sup_{0 < |\sigma| \leq 1} |\sigma|^{-\theta\gamma} \| \Delta_\lambda^\sigma \langle x \rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u \|_{L^1} \\
 & \leq Cn(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta_*(\rho))} \| \langle x \rangle^{-\varepsilon} u \|_1.
 \end{aligned}$$

$f(\lambda) = h_{L, \lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$  に対して自明な等式

$$(4.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} (f(\lambda) - f(\lambda - \pi/\sigma)) d\lambda.$$

を用い,  $\lambda \leq \lambda_0$  で  $h_{L, \lambda_0}(\lambda) = 0$  であることを用いれば  $(n-2)(1-\theta_*(\rho)) > 1$  を満たす  $n$  に対して (4.9) が得られる。□

命題 4.1 は  $\lambda_0$  を十分大きく取って, 補題 4.2 と補題 4.3 を補間したあとに, (4.5) の右辺で  $n$  について和を取れば得られる。

## § 4.2. 低エネルギー評価

次に低エネルギー部分  $u_{low}(\lambda) = \chi(\lambda/2\lambda_0)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}u$  に対する評価を示そう。ふたたび

$$\hat{u}_{low}(\sigma, x) = (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \rho} u_{low})(\sigma, x)$$

と書く。

命題 4.4.  $0 < \gamma, \varepsilon, \gamma + \varepsilon < \kappa_{\max}$  とする。

$$(4.13) \quad \iint_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon |\hat{u}_{low}^{(\ell)}(\sigma, x)| dx d\sigma \leq C \| \langle x \rangle^\varepsilon u \|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

が成立する。ただし  $C$  は  $u$  によらない定数である。

証明の basic strategy はふたたび Goldberg から拝借する。  $B(\lambda, \mu) = G_0(\lambda) - G_0(\mu)$  と定義する。Hardy の不等式の帰結である次の補題の証明は読者にまかせる。

補題 4.5.  $0 \leq \varepsilon + \theta < \kappa_{\max}$  に対して

$$(4.14) \quad \| \langle x \rangle^\varepsilon VB(\lambda, \mu) \langle x \rangle^{-\varepsilon} \|_{\mathbf{B}(L^1)} \leq C |\lambda - \mu|^\theta.$$

$S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1}$  と定義する。 $S(\lambda)$  は  $\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$  値ノルム連続である。レゾルベント方程式によって

$$(4.15) \quad S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1} = (1 + S(\mu)VB(\lambda, \mu))^{-1}S(\mu).$$

(4.14) によって  $d_0 > 0$  を小さく取れば  $|\lambda|, |\mu| \leq 2\lambda_0$  の時,  $|\lambda - \mu| < 4d_0$  に対して

$$(4.16) \quad \|S(\mu)VB(\lambda, \mu)\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-l-\varepsilon} L^1)} < 1/2.$$

そこで  $\chi(\lambda/2\lambda_0)$  を台が長さ  $d_0$  以下の小さな台を持つ関数に分解して

$$(4.17) \quad \chi(\lambda/2\lambda_0) = \sum_{j=-n}^n \chi_{j,d}(\lambda), \quad \chi_{j,d}(\lambda) \equiv \chi((\lambda - \mu_j)/d) \chi(\lambda/2\lambda_0).$$

として,

$$(4.18) \quad u_{low}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \chi_{j,d}(\lambda) S(\lambda) u \equiv \sum_{j=1}^n u_{low,j}.$$

と分解する。各  $u_{low,j}$  に対して (4.13) を示せばよい。(4.16) によって,  $\chi_{j,d}(\lambda) \neq 0$  の時,  $\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$  において

$$(4.19) \quad \begin{aligned} S(\lambda) &= (1 + \chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^{-1} S(\mu_j) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^m S(\mu_j) \end{aligned}$$

と展開できる。 $0 \leq \varepsilon < \kappa_{\max}$  である。 $|\mu| \leq 2\lambda_0$  に対して

$$T_\mu(\lambda) = \chi((\lambda - \mu)/2d) S(\mu) VB(\lambda, \mu).$$

と定義する。

補題 4.6.  $0 \leq \varepsilon + \gamma + \theta < \kappa_{\max}$  とする。 $0 < d < 1$  に対して

$$(4.20) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \| \langle x \rangle^\varepsilon \mathcal{F}(T_\mu(\lambda)u)(\sigma, x) \|_1 d\sigma \leq C d^\theta \| \langle x \rangle^\varepsilon u \|_1.$$

$C$  は  $|\mu| \leq 2\lambda_0$  および  $0 < d < 1$  にはよらない定数。

補題 4.6 の証明に用いる次の初等的な補題の証明は省略する。

補題 4.7.  $0 \leq \varepsilon, \theta \leq 1, 0 \leq \theta + \varepsilon \leq 1$  とする。 $0 < d \leq 1, 0 < \rho < \infty$  に対して次が成立する：

$$(4.21) \quad a \int \langle \sigma \rangle^\varepsilon | \hat{\chi}(a(\sigma - \rho)) - \hat{\chi}(a\rho) | d\sigma \leq C a^\theta \langle \rho \rangle^{\theta+\varepsilon}.$$

$\varepsilon = 0$  なら  $\langle \rho \rangle^\theta$  を  $|\rho|^\theta$  で置き換えてよい。

**補題 4.6 の証明**  $S(\mu) \in \mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$  だから  $\chi((\lambda - \mu)/2d)VB(\lambda, \mu)$  に対して示せばよい。 $G_0(\lambda)$  の積分核表示を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} \{ \chi((\lambda - \mu)/2d)VB(\lambda, \mu)u \}(\sigma, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} K(\sigma, x, y)u(y)dy, \\ K(\sigma, x, y) &= 2de^{-i\mu(\sigma - |x - y|)}V(x) \left( \frac{\hat{\chi}(2d(\sigma - |x - y|)) - \hat{\chi}(2d\sigma)}{4\pi|x - y|} \right). \end{aligned}$$

補題 4.7 を用いると

$$(4.22) \quad \int \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon K(\sigma, x, y) \langle y \rangle^{-\varepsilon} |d\sigma| \leq C|V(x)|d^\theta \frac{\langle x - y \rangle^{\gamma + \varepsilon + \theta}}{|x - y|}.$$

右辺を  $\langle x \rangle^{\gamma + \varepsilon + \theta}|x|^{-1}$  を核とする合成積作用素と掛け算作用素  $V$  との積と考え、前者に Hardy 型あるいは Young の不等式を用いれば補題が得られる。□

$fg$  のフーリエ変換が  $\hat{f}, \hat{g}$  の合成積であることを用いれば次の補題は補題 4.6 から帰納的に得られる。

**補題 4.8.**  $0 \leq \varepsilon + \gamma + \theta < \kappa_{\max}$ ,  $0 < d < 1$  とする。 $k = 1, \dots, n$  に対して,  $S_k(\lambda)$  は  $\mathbf{B}(L^1(\mathbb{R}^3))$  に値をもつ  $\mathbb{R}$  のコンパクト台をもつ連続関数で,  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  に対して

$$(S_k u)(\lambda, x) = S_k(\lambda)u(x) \in L^1(\mathbb{R}_{(\lambda, x)}^4),$$

と定義する時,  $u$  によらない定数  $C_k$  が存在して

$$(4.23) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \left\| \langle x \rangle^\varepsilon \widehat{S_k u}(\sigma, x) \right\|_1 d\sigma \leq C_k d^\theta \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1$$

が成立すると仮定する。この時,

$$T_n(\lambda) \equiv S_n(\lambda) \cdots S_1(\lambda)$$

は

$$(4.24) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \left\| \langle x \rangle^\varepsilon \widehat{T_n u}(\sigma, x) \right\|_1 d\sigma \leq C^n \left( \prod_{k=1}^n C_k \right) d^{n\theta} \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1,$$

を満たす。 $C$  は  $n, C_1, \dots, C_n, d, u$  にはよらない定数。

低エネルギー部分の評価である命題 4.4 は補題 4.8 から従う。

$$f_m(\lambda, x) = \chi_{j,d}(\lambda) \times ((4.19) \text{ の右辺の第 } m \text{ 項})u(x)$$

と定義すれば,  $d < 1$  を十分小さく取る時,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\sigma \|\langle x \rangle^\varepsilon (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} f_m)(\sigma, x)\| dx d\sigma \leq \sum_{m=1}^{\infty} (Cd^\theta)^m \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|$$

となるからである。詳細は省略してよいだろう ([13] を参照)。



## References

- [1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), 151–218.
- [2] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of  $NN$ -body Schrödinger operators*. Mathematical Notes, **29**. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.
- [3] G. Artbazar and K. Yajima, *The  $L^p$ -continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 221–240.
- [4] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces, an introduction*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).
- [5] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *Dispersive estimates for the Schrödinger equation with potentials of critical regularity*. Cubo **11** (2009), 57–70.
- [6] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *High frequency dispersive estimates for the Schrödinger equation in high dimensions*. Asymptot. Anal. **71** (2011), 207–225.
- [7] H. Cyson, R. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] P. D’Ancona and L. Fanelli,  *$L^p$ -boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator*, Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 415–438.
- [9] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three I*. Dynamics of PDE, **1** (2004), 359.
- [10] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three. II*. J. Anal. Math. **99** (2006), 199–248.
- [11] D. Finco and K. Kenji, *The  $L^p$  boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), no. 3, 277–346.
- [12] A. Galtbayar, A. Jensen and K. Yajima, *Local time-decay of solutions to Schrödinger equation with time-periodic potentials*, J. Stat. Phys. **116** (2004), 231–282.
- [13] A. Galtbayar and K. Yajima *Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations*, to appear in Jour. Math. Soc. Japan.
- [14] M. Goldberg and W. Schlag, *A limiting absorption principle for the three-dimensional Schrödinger equation with  $L^p$  potentials*. Int. Math. Res. Not. 2004, no. 75, 4049–4071.
- [15] M. Goldberg, *Dispersive estimate for the three-dimensional Schrödinger equation with almost critical potentials*, Geom. and Funct. Anal. **16** (2006), no. 3, 517–536.
- [16] M. Goldberg and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three*, Commun. Math. Phys. **251** (2005), 157–178.
- [17] M. Goldberg and M. Visan, *A counter example to dispersive estimates for Schrödinger operators in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 1, 211–238.
- [18] A. D. Ionescu and D. Jerison, *On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials*. Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 5, 1029–1081.
- [19] A. D. Ionescu and W. Schlag, *Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations*. Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 397–440.
- [20] A. Jensen and T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

- [21] A. Jensen and K. Yajima, *A remark on  $L^p$ -boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 633–637.
- [22] A. Jensen and K. Yajima, *On  $L^p$  boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger operators with threshold singularities*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 136–162.
- [23] J.-L. Journé, A. Soffer and C. D. Sogge, *Decay estimates for Schrödinger operators*. Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), no. 5, 573–604.
- [24] T. Kato, *Remarks on the essential selfadjointness and related problems for differential operators* in Spectral theory of differential operators, ed. by J. W. Knowles and R. T. Lewis (North Holland, Amsterdam 1981).
- [25] C. E. Kenig, A. Ruiz and C. D. Sogge, *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators*. Duke Math. J. **55** (1987), 329–347.
- [26] H. Koch and D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues*. Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 2, 419–449.
- [27] S. T. Kuroda, *Scattering theory for differential operators. I. Operator theory and II. Self-adjoint elliptic operators*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 75–104 and 222–234.
- [28] H. Mizutani, *Dispersive estimates and asymptotic expansions for Schrödinger equations in dimension one*, J. Math. Soc. Japan, to appear.
- [29] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations*, J. Funct. Anal., **49** (1982), 10–56.
- [30] J. Rauch, *Local decay of scattering solutions to Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **61** (1978), 149–168.
- [31] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol II, Fourier analysis, selfadjointness*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).
- [32] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol IV, Analysis of operators*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1978).
- [33] I. Rodnianski, W. Schlag and A. Soffer, *Dispersive analysis of charge transfer models*. Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 149–216.
- [34] I. Rodnianski and W. Schlag, *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials*. Invent. Math. **155** (2004), 451–513.
- [35] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions two*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 87–117.
- [36] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey* in Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, Ann. of Math. Stud., **163** (2007), 255–285, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [37] E. M. Stein, *Interpolation of linear operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 482–492.
- [38] K. Yajima, *The  $W^{k,p}$ -continuity of wave operators for Schrödinger operators*. J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551–581.
- [39] K. Yajima, *Dispersive estimates for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalue*, Commun. Math. Phys. **259** (2005), 475–509.
- [40] K. Yajima, *On time dependent Schrödinger equations*, in *Dispersive nonlinear problems in mathematical physics*, ed. P. D’Ancona and V. Georgiev, Quaderni di Matematica **15**, Seconda Università di Napoli (2005), 267–329.
- [41] K. Yajima, *The  $L^p$  boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. I. The odd dimensional case*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13**

(2006), no. 1, 43–93.